

Άσκηση 173: Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $[1, 3]$. Να δείξετε πως υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιος ώστε

$$8f(x_0) = f(1) + 3f(2) + 4f(3)$$

Λύση:

α' τρόπος(Θ. Bolzano)

Έστω $g(x) = 8f(x) - f(1) - 3f(2) - 4f(3)$, που είναι συνεχής στο $[1, 3]$. Επειδή $f(1) < f(2) < f(3)$ (γιατί;) έχουμε

$$\begin{aligned} g(1) &= 8f(1) - f(1) - 3f(2) - 4f(3) \\ &= 7f(1) - (3f(2) + 4f(3)) \\ (&;) < 7f(1) - (3f(2) + 4f(2)) < 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} g(3) &= 8f(3) - f(1) - 3f(2) - 4f(3) \\ &= 4f(3) - (3f(2) + f(1)) \\ (&;) > 4f(3) - (3f(2) + f(2)) > 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή $g(1) \cdot g(3) < 0$. Από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow 8f(x_0) = f(1) + 3f(2) + 4f(3)$$

Αυτό το x_0 είναι μοναδικό, αφού η f είναι 1-1 στο $[1, 3]$. (γιατί είναι 1-1;)

β' τρόπος(Θ.Ε.Τ.)

Για την $g(x) = 8f(x)$ ισχύει ότι είναι συνεχής στο $[1, 3]$ και ότι $g(1) < g(3)$ (γιατί;).

Επίσης ισχύει

$$g(1) = f(1) + 3f(1) + 4f(1) < f(1) + 3f(2) + 4f(3) < f(3) + 3f(3) + 4f(3) = g(3)$$

Από το Θ.Ε.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 8f(x_0) = f(1) + 3f(2) + 4f(3).$$

Αυτό το x_0 είναι μοναδικό, αφού η f είναι 1-1 στο $[1, 3]$. (γιατί είναι 1-1;)

γ' τρόπος(Θ. Μέγιστης-Ελάχιστης τιμής)

Για την $g(x) = 8f(x)$ ισχύει ότι είναι συνεχής στο $[1, 3]$. Από υπόθεση (ποιά;) και το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής προκύπτει ότι

$$g([1, 3]) = [8f(1), 8f(3)]$$

Αφού $8f(1) < f(1) + 3f(2) + 4f(3) < 8f(3)$ (*), έπεται ότι

$$f(1) + 3f(2) + 4f(3) \in g([1, 3]).$$

Εξ ορισμού του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης, υπάρχει $x_0 \in [1, 3]$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 8f(x_0) = f(1) + 3f(2) + 4f(3). \text{ Λόγω της (*) και της μονοτονίας της } g \text{ στο}$$

$[1, 3]$ έχουμε ότι $x_0 \in (1, 3)$ και μάλιστα είναι μοναδικό(γιατί;).